宇都宮大学教育学部教育実践紀要　第２号　2016年８月１日

比例の授業における数学的談話の構成 †

―GeoGebraを通して教師が語ったこと―

日野　圭子
宇都宮大学大学院教育学研究科

Abstract　The purpose of this study is to examine teaching practice and students' learning from discoursive perspective in a design experiment on proportional/inverse-proportional functions (grade 7). The present paper adopts A. Sfard' s commognitive approach and focuses on the "tools of visual mediators" designed by using a dynamic mathematics software "GeoGebra." The paper presents several classroom situations in which the tools are actually used. In particular, it illustrates how the teacher talked about function and proportional function with the tools. It was found that the teacher positively narrated the aspect of "motion" for both function and proportional function, which is different from the typical textbook-only lessons on these contents. Narratives about motion and action also produced the necessity of separating the moving object and its representations (how the object is represented). These observations indicate that the specific tools of visual mediators have provided an opportunity for the students to reflect on their preceding discourse on proportion.

キーワード：数学的談話，視覚的媒介の道具，関数

１．はじめに

中学校第1学年の関数の内容領域は，小学校における数量関係の学習と中学校以降の関数の学習とをつなぐ位置づけを担っている。そこでは，小学校高学年で学んできた比例，反比例を，負の数の範囲に拡張するとともに，「関数」という用語の導入によって，比例・反比例の性質を振り返り，関数的な見方で見直していく。この振り返りがスムーズに進むと，中学校2年の一次関数，3年の$y=ax^2$の関数の学習に対してもよい影響が期待される。本研究の目的は，中学校1年の比例・反比例の授業において，生徒の振り返りを促進するための手立てを検討し，授業実践ならびに生徒の学びの様相を質的に考察することである。

この目的に対して，本研究では，談話（discourse）に注目して考察を進める。談話とは，辞書的には「筆記あるいは口語でのコミュニケーションやディベート」（オックスフォード新英英辞典）を意味する。数学教育では，授業でコミュニケートされる数学への関心の高まりから，談話についての研究が行われてきている。例えば，Walshaw & Anthony（2008）は，先行研究を整理し，数学を中核に据えた質の高い教室内談話の特徴と教師の役割をまとめている。本研究の関心である「振り返り」を授業の中に組み入れ，さらに，その実際を捉えていく上で，談話は有益な視点を与えると考える。現在，A. Sfardによる数学的談話の捉え方を参照し，デザイン実験として実践した比例・反比例の授業を考察している。本稿では，関数および比例に関わる部分での分析の結果を報告する。

以下では，まず，Sfardが示す数学的談話の特徴を述べ，本稿における問いを提示する。次に，比例・反比例の授業を計画する上で，数学的談話の特徴をいかに取り入れたかを述べる。続いて，実践された授業における数学的談話の様相を，幾つかのエピソードを通して描いていく。ここでは，GeoGebraというICT教材を用いながら，教師が関数と比例に

† Keiko Hino: Construction of mathematical discourse in the lesson of proportional function: What the teacher talked through GeoGebra.
Keywords: Mathematical discourse, Tools of visual mediators, Function.
Graduate School of Education, Utsunomiya University
（連絡先：khino@cc.utsunomiya-u.ac.jp）

ついて何を語っていたかを描写する。最後に，エピソードを通して描かれた数学的談話の特徴をまとめ，振り返りがどのように実践されたかを考察する。

2．Sfardにおける数学的談話の特徴

A. Sfardは，数学的コンセプションの研究において著名な数学教育研究者である。2000年代以降は，「コモグニション」論という，学習を概念化し研究するための社会文化的アプローチを展開してきている。「コモグニション」は，コミュニケーションと認知（コグニション）が一体であることを強調するために作られたSfardによる造語である。そこでは，認知主義的研究の限界に対して，より客観的で蓄積可能な数学的認識の研究法を目指したコミュニケーション論が展開されている（例: Sfard, 2008; Sfard, 2012)。本節では，コモグニション論における数学的談話の特徴について述べる。

(1) 数学的談話と数学学習の捉え方

コモグニション論において，談話は，特定のタイプのコミュニケーションである。数学は，他の分野と同様に，1つの談話の形式（数学的談話）と考えることができる。数学的談話は，数学的な対象についての談話であり，対象それ自身が談話の中で構成されてくる「自己生成」的なシステムであるという特徴を持っている（Sfard, 2008, p. 129)。数学的談話は，以下の4つの特徴によって顕在化する。

言葉とその使用：

どの談話も，独特な語彙を持っている。人々は，談話が持つ独特な語彙や，言葉の使い方を通して世界を語っていくことになる。従って，言葉とその使用は，談話の中核的な部分を形成している。言葉を使うときには，その言葉が指し示す対象が問題になる。コモグニションでは，言葉が指し示す対象を，「実体の木」と呼んでいる。例えば，「比例」という言葉を使うとき，比例の定義のみではなく，木のように連なって実体化された全体を考える。

視覚的媒介の道具：

談話には，コミュニケーションの一部分として，行為が施される視覚的対象が存在する。日常的な談話では，別個に存在する具体物のイメージに媒介されながらコミュニケーションが進んでいくことが多い。しかし，数学的談話では，グラフや式に媒介されながらアイデアがコミュニケートされるように，視覚的媒介の道具は，コミュニケーションをするために作り出される。

ルーチン：

ルーチンとは，類似のタイプの状況において繰り返される談話パターンを決定しているメタルールのセットである。メタルールは，参加者が課題を実行する際のパターン化された方法を生み出す。例えば，日常的な談話では，あるものを同定する際には，見た目や音，その他多様な特徴をもとにするが，数学における同定の課題では，定義を満たすかどうかで判断がなされる。定義による判断は，数学の共同体において承認されたルーチンである。

承認されたナラティブ：

関連する共同体によって真であると認められ得るあらゆるテキストを指す。数学的談話では，数学的対象や対象間の関係についての言明であり，「数学的事実」と呼ばれるものである（例，2+3=5，三角形の内角の和は180° である)。定義，定理，計算法則などは，すべてナラティブである。これらのナラティブは，数学の長い歴史の結果であり，数学の共同体において承認がなされてきている。

これらの特徴は互いに関係しあって，数学的談話を形成している。「承認されたナラティブ」における「関連する共同体」は，数学的談話においては数学の共同体を指している。この規定に従えば，数学学習は，数学の共同体のメンバーになることと同じである（Sfard, 2012, p. 2)。

数学学習は，数学の共同体で認められた言葉の使用を学ぶこと，視覚的媒介の道具を使ったコミュニケーションを学ぶこと，談話パターンを学ぶこと，ナラティブを構成したり承認したりすることを重要な部分として含む。そして，数学学習は，学習者の数学的談話の変化によって規定される(Sfard, 2012, p. 2; Tabach & Nachlieli, 2015, p. 166)。この変化がどのようなものかは，コモグニション研究における焦点の一つである。数学学習のステップはいかなるものか，学習の進展にカリキュラムや教師の何が影響を与えるのか。こうした問いが，現在探究されている。

(2) 本稿における問い

本研究では，中学校1年の比例・反比例の単元において，デザイン実験を行っていく。デザインをする上で目指すことは，冒頭で述べたように，生徒がそれまでに学んできた比例・反比例の性質を，関数という見方から振り返ることである（授業デザインの具体的な方針については，日野（2015）を参照)。

換言すると,「関数」という言葉が導入されることで,生徒がそれまで馴染んできている比例・反比例の談話が,関数という新たな言葉の下で見直され,変容することを期待している(cf., Tabach & Nachlieli, 2015)。そこで,変容の様相を捉える上で,上述した談話の特徴を切り口とすることを考えた。

本稿では,4つの特徴の中の「視覚的媒介の道具」に注目をしていく。視覚的媒介の道具に関わって,授業では,ソフトウェアGeoGebraによるデジタル教材を用いた。そこでは,スクリーン上の表,式,グラフを視覚的媒介の道具として,関数,比例,反比例についての学習が進められた。本稿での問いは,「GeoGebraによる視覚的媒介の道具は,授業においてどのような談話を形作っていたか」である。以下では,第1～12時(関数および比例が扱われた)におけるデジタル教材のデザインの概略を述べ,実際の授業での教師の談話の様子を描写する。関数や比例についての語り口の特徴から,本稿の問いへの答を探っていく。

3. 研究の文脈

(1) 授業データの収集について

本稿で考察する授業は,2015年11月～12月にかけて,栃木県内の公立中学校1年1クラスにおいて行われた。比例・反比例の単元(全21時間)の授業の中の前半部分である。授業のデザインは日野が行ったが,デザイン案を授業者らと共有する中で修正を加えることがあった。また,授業が実施されている最中であっても,授業の様子から次時以降のデザインに修正を加えることもあった。授業者へは,課題や活動,教師の発話や予想される生徒の反応等を含めた「授業シナリオ」を予め提供した。授業者は,シナリオをもとに授業を実施した。授業はTTで行われ,T2(技術科教員)がデジタル教材の提示を担当していた。

授業において収集したデータは,全授業のビデオによる記録(教室前方と後方にカメラを設置),生徒のワークシート,数名の生徒のノートのコピーである。日野は3回,授業を参観した。日野は,授業が実施されるとその都度授業ビデオを視聴し,シナリオに照らしてコメントを作成した。現在,収集したビデオ記録とシナリオへのコメントをもとに,分析を行っている。本稿では,12時間の中で,デジタル教材が使われた場面を幾つか抽出し,そこで授業者によって話されている内容を述べていきたい。

(2) 授業の概要

表1は,第1時から第12時に実施された授業の概要を示している。表1の「概要」欄における波線は,その部分でGeoGebraによるデジタル教材が使われたことを示している。

表1:比例・反比例の単元の第1時から第10時の授業の概要

時	トピック	概要
1	具体場面で量の関係を考える	風呂の水を何分後に止めに行ったらよいかという問題を考える。直方体の風呂Aで考えた後,直方体でない風呂Bについての表を提示し,水の増え方を比較して,同じところと違うところを挙げる。
2	関数の意味を理解する	前時の2つの風呂について,水がたまっていく様子を見せ,時間を決めると水の量が決まることを確認する。関数,変数を導入する。その後,関数の例を選び出す練習問題。
3	変域を負の範囲でも考える	関数一族,比例一族という言い方で前時を復習した後,風呂の場面で,変域を導入する。続いて,上りエレベータ(地上階)について,高さが変わっていく様子を見せて比例を確認すると,変化の様子を自分なりの方法でノートに書かせる。次に,同じエレベータを地下に延ばした時の,地下の部分をどう表すかを,表で考える。
4	式,グラフで表す	前時の続きとして,式,グラフではどう表すことが出来るかを考える。生徒の発表の後,表,式,グラフを動的に見せる。座標の導入。最後に,上りエレベータ(地上・地下)が比例一族のメンバーであることをまとめる。
5	座標の練習 比例定数が負について考える	座標の練習をする。その後,本題として,下りエレベータについて,やはり表,式,グラフで表すことを指示する。作業の途中で時間となった。

6	比例定数が負について考える グラフのかき方を考える	生徒が表，式，グラフでの表し方を発表し，比例と言えることを確認する。比例一族のメンバーに加える。その後，グラフのかき方を考える。表を利用して y=4x，y=-4x のグラフをかき，スクリーンで確認する。次に，y=2/3 x のグラフをかき，(3, 2) をとってかくことをスクリーンで確認する。
7	グラフのかき方を考える	y=2/3 x について，スクリーンを見せながら，なぜ(3, 2)なのか，また，なぜいきなり 3 にしたのかを聞き，原点と 1 点を取れば良いことを説明する。その後，y=x, y=－1/2 x, y=1.5x, y=－3/5 x のグラフを生徒が各自でかき，点をとって直線を引く様子をスクリーンで確認する。
8	比例の式とグラフの関係を考える	y=－3/5 x のグラフについてスクリーンで確認した後，第 6，7 時でかいたグラフを比較しながら，比例の式とグラフの関係を考えていく。最初は個別に，その後グループで話し合う。共通点と違うところをグループ毎に発表する。発表の中で，スクリーン上でグラフを見せる場面もあった。最後に発表された関係を，比例一族の特徴としてまとめた。残った時間は練習問題。
9	比例の式を求める	比例一族，関数一族の確認をした後，これまで学んだ比例の特徴を使って，比例の式を求めていく。問 1 は表から式を求める。問 2 は，1 点から式を求める。問 3 はグラフから式を求める。どれも生徒が求めた後，スクリーン上で確認した。
10	比例の式を求める，練習問題	問 3 について，どの点を使って，式を求めるかを，スクリーン上で再度実演する。x がいくつ増えると y がいくつ増えるかを階段の例えを使って説明する。その後，練習問題。
11, 12	比例の応用(マラソンの走り)	マラソンでの走りを，グラフを使って考える課題をする。「比例とみなす」ことを扱った。

(3) 授業で計画された視覚的媒介の道具

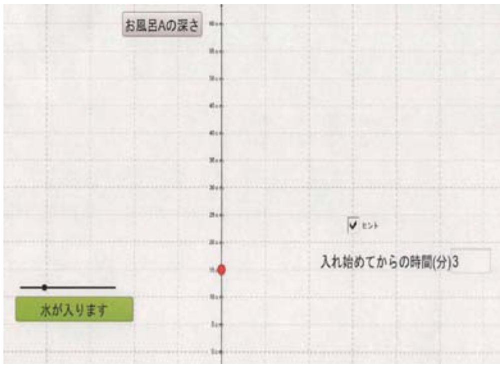
GeoGebraによるデジタル教材は教室前方の大型スクリーンに示され，一斉で確認をする形で使われた。これらの視覚的媒介の道具は，以下のように，幾つかの意図を持って作成した。作成に当たっては，布川氏（上越教育大学）が別に作成したアプレット（大谷他, 2015）を改変したり，助言を頂いたりした。

(ア) y軸上を点が動く

・現実場面で変数，関数を視覚化する（第2時）

風呂A，Bに対して，深さをy軸上に点として取り出し，動かす。風呂Aにおける点の動きは一定のスピード，風呂Bでは徐々に遅くなっていく様子から，変数を導入する。その後，もう一つの変数としての時間に気付かせ，関数を導入する。ここでは，時間をボックスに入力すると，点が必ず1つ決まることを，幾つかの例で確かめる（図1は，3分の時に15cmたまっていることを示している)。同様のアプレットを，練習問題に対しても作成した。

図1：風呂Aにおける時間と深さの表示



・現実場面での量の関係を表やグラフで表す必要性を促す（第3時）

上り（下り）エレベータの場面に対しても，風呂と同様に，高さをy軸上に点として取り出し，一定のスピードで動いている様子を見せる。ここで，毎秒2mという問題情報から，時間と高さが比例関係にあることを確認する。その後，いつどこまで水がたまっているかを知りたいが，動画だと動いてしまうので，動かない表現で表したいと問いかけ，これ

までに学んできた表やグラフ，式を使って表す活動に入る。

（イ）表，式，グラフが伴って動く（第4時，第6時，第8時）

エレベータの場面では，生徒がかいた表，式，グラフを確認する際に，表現様式間の対応を同時に見せる。表で1組のxとyの値を定めると，それが式に，更には，座標平面上の点として見える（図2は，（−10，−20）から（2, 4）までの値が示されている）。連続的な動きも，表では1つのセルの中のxとyの数値が連続して変わり，式でもその様子が映し出され，また，グラフでは点が動いていく様子として表される（図3は（−10，−20）のスナップショットを示している）。

図2：表，式，グラフ（離散バージョン）

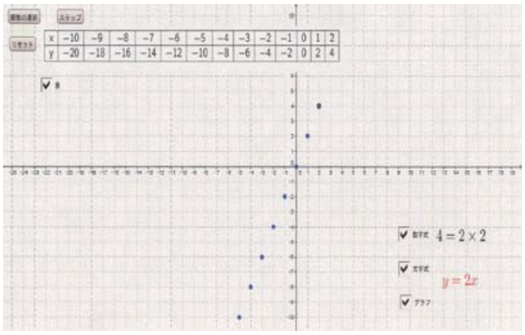
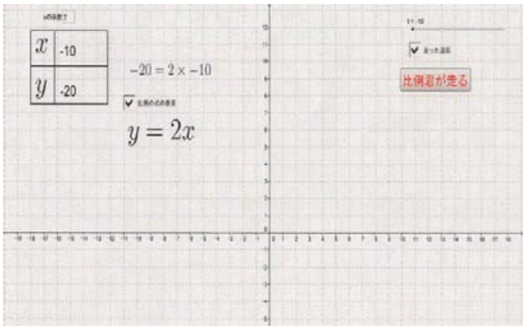


図3：表，式，グラフ（連続バージョン）

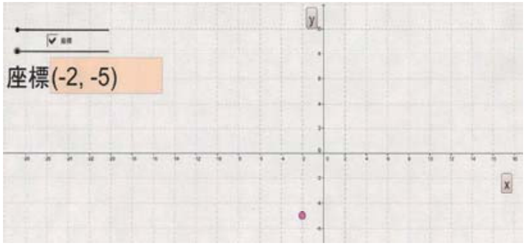


この映像を通して，自分がかいた表が，離散的な幾つかの値に過ぎないこと，それが式やグラフの点と対応していることを視覚的に捉えることを期待した。同様のアプレットを，y=4x，y=−4xのグラフをかく際（第6時），式とグラフの関係を考える際（第8時）にも使用した。

（ウ）座標の練習を行う（第5時）

座標を入力すると，その位置の点が座標平面上に表示される（図4を参照）。これを使って，座標と点の対応についての練習をゲーム的に行う。

図4：座標と点



（エ）式，グラフの相互の関係を可視化する（第9時，第10時）

1組の座標，あるいは，グラフから比例の式を求める際に，生徒が求めた式を入力し，そのグラフを動的に表示する。式が正しい場合は，与えられている点（1組の座標）の上を，そのグラフが通過する。グラフが与えられている場合は，そのグラフの上をなぞるように通過する。一方，式が正しくない場合は，点を通過しなかったり，グラフ上をなぞらなかったりする。このようにして，式が正しいか否かを，グラフの動きで視覚的に確かめることができる。同時に，式とグラフの対応関係を見えやすくする。

図5：式が正しくない場合

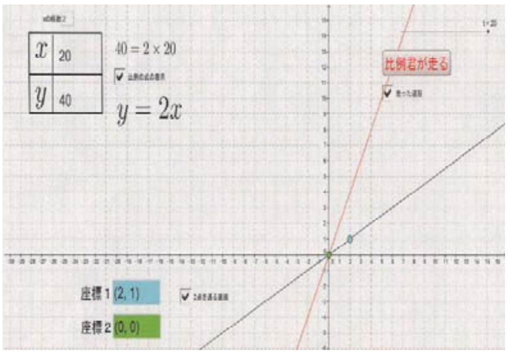


図5では，2点（2, 1）と（0, 0）を通る直線の式を「y=2x」と考えた時に，その式を入力すると赤い軌跡が描かれ，式が正しくないことが示されている。

4．GeoGebraを通して教師が語ったこと

本節では，３(3) で示した視覚的媒介の道具が，授業において実際にどのように使われたか，また，その際にどんなことが話されたり，話題になったりしたかを，幾つかの特徴的な場面について，エピソー

ドを交えながら描写していく。

（1）第2時

授業では，まず風呂Aについて，デジタル教材を提示して水がたまっていく様子を見せた（図1参照）。次に，時間のボックスを表示し，再度動かした。時間が小刻みに変わるとともに，深さを表す点がy軸上を動く様子が見えた。ここで，「1分半で何cm っていうのがありますか？」「深さ決まる？」のように問いかけ，T2が，3.6分の時に点がどうなるかを演示した。この時，T2は，3.6を直接ボックスに入力するのではなく，スライダー（図1の  を参照）を動かして，その時間をボックスに表示するという操作を行ったため，生徒の注意は，スライダーと時間のボックスに集中した。「あー！」「おしい！」という声が響いた。その後，教師が，「でも3.6分のとき，ここまで入ってる（y軸上の点を指して）っていうのがあるよね。20cmよりちょっと少ないけど，ここまで入ってますっていうのが確実にあるよね」と述べ，時間が決まると深さが1つ決まることを指摘した。

更に，生徒から好きな時間を挙げてもらい，その時間でも，y軸上の点が1つ決まることを，演示した。「9.6分の時はここ。四十何センチ，五十センチちょっと手前くらいで止まってる。それぞれ，その時にたまっている水の量って決まってくるよね」と言い，「xが決まるとyが決まる」こと，そして，「関数」を導入した。

次に，風呂Bについても同様に，水がたまっていく様子を動的に見せた。「さっきとの違いが分かる人」と聞くと，生徒から，「スピード」というつぶやきが聞こえた。再度見せて，教師が「スピードが遅くなっているかもね，言われれば。ちょっとね」と述べ，風呂Bの表を指しながら，深さの数値が風呂Aと比べて一定に増えていないこと，更に，その理由を，風呂Bの形が「途中からでっぱった分のところがね，入りきらない，そこを入れることによって，少し入るのが遅くなる」のようにジェスチャーを交えて述べた（第1時では自作教具で示している）。

その後，風呂Bが関数かどうかを聞くと，多くの生徒が関数ではないと挙手した。「xが決まるとyが決まる」かどうかを，生徒に時間を挙げてもらい（19.6分と2.9分），T2および生徒が演示した。ここでも，スライダーの操作に生徒の注意が向いた。教師は，y軸上の点が表示される度にスクリーンを指さし，「あそこまで水がたまってます」，あるいは，「深さがあったよね」「この場所って止まるでしょ」「何分たったら，ここっていう場所が決まる」のように述べ，「決まれば決まる」ことを強調した。

（2）第4時

地上・地下を１つにした上りエレベータの時間と高さの関係を，式とグラフで表すことが扱われた（第3時は，表で表している）。デジタル教材を使って，まず，表にxが－10から10までの整数値と対応するyの値が入って作られていく様子が示された。次に，式も出され，表の数値に対応した形で，数字式のxとyに相当する数値がクルクルと変わっていく様子が示された（図2参照）。

ここで，式について気付いたことを問うと，生徒から，xとyはどんどん変わるが2だけは変わっていないという意見が出された。「これ（2）が何を表しているかというと」という教師の問いかけに続き，生徒からは「xとyの関係」，更に，「y=2x」が出された。教師は，黒板にかかれた表を指しながら，「これ（y=2x）が，あらゆる場所に，xが2倍したっていう式がね，xを2倍して，2倍して，2倍して，すごく色んなところに出てくるね（表の幾つかのx，yの対応する値に縦の矢印を入れる），２っていう数がね，マイナスの方もそうだったよね，全部かかないけど」と述べた。

グラフについては，小学校での比例のグラフを復習した後，生徒自身で方眼用紙上に自由にグラフをかく時間が取られた。小学校との違いは，地下があるかないかであることが述べられた。実際，「地下がかけない」という声があがる等，マイナスの世界をどう表すかが一つの焦点になった。個性的なグラフ表現も発表されたが，生徒から，原点を中央に置いたx軸とy軸による座標平面の表し方が出された。教師は，数直線という言葉を用いて，「こんなふうに，縦と横に数直線を使うことで，マイナスの方まで表せちゃうんだね」と述べている。座標平面上にかかれたグラフを書画カメラに写して確認すると，「みんなが知っているプラスの世界はここです（第一象限を指す）。マイナスの世界が一緒にかけちゃいます（第三象限を指す）。なんて便利なんでしょう」と述べて，まとめていった。

この後，デジタル教材によって，表，式の数値が現れるのと同時に，座標平面上に，左下から右上に向けて点が次々に打たれていく様子が示された（図

2を参照)。生徒は注目してみている様子である。生徒がかいたグラフは直線であったため，教師は「さっきのR君のは繋がってましたね。繋げました。[これは（画面を指して）]繋がってないんですけど，どうしてみんなは繋がってるんですか」と問いかけた。生徒はざわついたが，「比例してるから」「永遠に続くから」という声が上がった。これらを受け，教師は次のように述べた。

教師：続くからって言ってくれたね。確かに，…エレベータが挙がって行く時に，ワープして，ピッ，ピッとは，行かないね。ずっと続いてますね。ということは，表にあるのは一部です，ね，整数のところしか書いてないけど，間も続いているから，繋げちゃっていいのかどうか，考えなきゃならないね。…何か繋げそうですね。

(3) 第6・7時

授業の後半では，表を利用してグラフをかくことが扱われた。まず，y＝4xについて，生徒は表を使って各自グラフをかいた。その後，一斉で表を確認し，スクリーン上で，表，式と同時にグラフを動的に見せた。ここでは，点の動きの軌跡としてグラフが示された。GeoGebraでの数値の範囲の設定の関係から，動点がスクリーン上に現れるまでに，少し時間がかかる。教師は，動点が現れると，「お，来た，来た，来た，来た…」と小声で言っていた。そして，動点がスクリーンの座標平面上を通り過ぎ，軌跡がグラフとして残されると，教師は，表のいくつかの数値（座標）を，グラフが通っていることを確認した。そして，点を繋いで良いことを確認すると，グラフに名前を付けることを指導した。

続いて，y=－4xについても，動点の軌跡としてグラフが示された。教師は，グラフの現れ方について，「これは下りのエレベータみたいに，左の上から，ずっと，右に降りてくるような，右下がりしてるね，どっちも原点は通ります」のように表現した。その後，グラフをかく際の注意事項として，「途中で終わらないでね，全部，端から端までかいて下さい」と述べた。

端から端まで結ぶことについては，第7時にグラフをかく練習をするときにも，教師から言及があった。その際には，デジタル教材の動点が参照されている。教師は，「端から端まで，見えてるところ（スクリーンのグラフを指して）全部を結んで下さい」のように述べ，更に，次のようにも説明を行った。

教師：これ（スクリーンを指しながら）で，よく，こう，歩いてたじゃない。比例君，比例君が行く，で走ってた。(手を左下から右上に動かしながら)ずうっと，ずうっと，まだ来ないよ，ずうっと来ないところから，ずうっとグラフが走っているんです。ずうっと来て，ここで見えた時に初めて，皆がかく所。でも，その先もまだ続いてます（手を動点として動かしながら)。だから，見えている中は，全部，端から端までかく…

更に，この点は，(4）で述べるように，第8時に，比例の式とグラフの関係をグループで話し合い，結果を発表する際にも話されていた。

(4) 第8時

第8時は，第6・7時にかいてきた複数のグラフとそれらの式表現を比較し，共通点と相違点を多様に挙げるというグループ活動が行われた。授業の後半では，グループによる発表が行われた。共通点として，原点を通ることと，直線であることに加えて，「端から端まで直線でつながっている」「永遠に続く」という特徴が発表された。「永遠に続く」の発表に続いて，教師は以下のように述べていた。

教師：さっき，T2先生が，ビイって走ってたからね，…，ずうっと向こうの方から来て，端まで行くから，端から端までかきます。その先もあるからっていう言葉がちゃんと頭に入っていたね。永遠に続く，ずっと，先もある。でも，みんながかけるのは，ここに入っている部分だけなのね，ほんとはずっとこう続いています。天井を突き破って，宇宙までね。宇宙も突き破って（笑う)。永遠に続くっていう表現をしてくれたのね。すごいね，これね。

もう1つ，発表時に話題となったのが，「右上がり」「右下がり」という表現の仕方である。グループの発表では，「マイナスがあるのは右下がり，マイナスがないのは左下がり」「マイナスの時は右下がり，プラスの時は右上がる」のように，異なる表現の仕方が出された。表現は違うが，同じことであることが注意された。発表後のまとめにおいて，教師は，再度，この点に注目した。そして，スクリーン上で幾つかの関数のグラフを見せながら，「右上がり」「右下がり」の言い方に統一する理由を述べた。以下は，その時のやりとりである。

教師：右下がりなのか左下がりなのか，右上がりなのか右下がりなのかって，わけがわからなくなるよね。どこを見たらいいんだろう。右とか左とか言ってると

分からなくなっちゃうので，比例君，比例君走るんだけど，比例君が走るの，どこから来る？
生徒：(一斉にスクリーンを見る。）下，下，右上がり，（ざわつき，つぶやきが聞こえる）左下。
教師：そうだね，左下，よく覚えてるね，みんな。
（ここで，T2 が比例君（y=15x）を，走らせる。）
生徒：(注目して見ている。)
教師：来た，来た，来た，来た。来たー
生徒：(笑う）
教師：見えた？見逃しちゃった？ T2先生，もう一回お願いします。
T2：(再度，走らせる）－20から進んでる。
教師：そうだね。ずっとこっちの方にいるんだね，まだね。こっちの方，ずうっといます。そろそろ来た。来た，来た…。大丈夫？…　はい，比例君走ってきたんだけど，xがこっち，マイナスがこっち，マイナスからプラスで，こっちに走っていくよね。だから，右の方向に行っているので，左下から，今，上がってきました。ね，これね，T2先生，…。今度これで行きます。y＝－1/2 xです。…，走りまあす。どっちからくると思う？
生徒：(注目している。左から出てくると，「左…」のようなつぶやきが聞こえる)
教師：左から来た，こっち。そう思わなかった？こっちから来ると思った？…　そうだね，x，xがこうずっと，1，2，3，4，5，6とこっちに行くので，共通しているのは右に進んで行く，です。比例君走る，を思い出してください。右に進んでいく。右に行くのを基本にしましょう。ということは，右…上がりと，右…下がり。と，共通すれば，統一しておけば，左に行っちゃうと，上がるか下がるかどっちかわからなくなっちゃうので，右に行く，で統一しましょう。

そして，この後，教科書を用いて，式とグラフの関係についてのまとめがなされた。

(5) 第9・10時

第9時と第10時の前半を使って，比例の（1）表，(2) 1組の座標，（3）グラフから，式を求めていった。

課題（2）は，「yはxに比例し，x=4のときy=12です。yをxの式で表そう」であった。生徒が個別解決をした後，一斉で確認がなされた。スクリーンでは，2つの座標を入力するために，青色と黄緑色の2つのボックスが表示された（図5を参照)。そこに（4, 12）と（0, 0）を入力すると，対応する点が，同じ色で座標平面上に表示された。そして，それら2点を通る直線が引かれた。教師は「(4, 12）って言ったときに，これがざっと思い浮かぶといいね。…4と12だから，この辺の点だから，こんな形になるなあ，なんていうのが，分かるといいと思います」とコメントし，「右上がりだからaがプラスっていうことが，まず，分かりますね」と述べた。

その後，計算の方法を問うと，生徒からは，表を作ってx=1のyの値を使ったという意見，a=12÷4=3で求めたという意見，12=4aからaを求めたという意見が出された。これらから，y=3xを確認すると，スクリーン上のグラフが，確かに（1, 3）を通っていることを確認した。その際には，「おんなじ，ちゃんとグラフの上に，この（1, 3）が通るね，ばっちり。ということも分かりました。なんか，すっきりするね」と述べている。

課題（3）は，「下の図のグラフは，比例のグラフです。yをxの式で表そう」であった（グラフ黒板には，y=1/2 xのグラフがかかれていた)。生徒の個別解決後，第10時に，一斉で確認がなされた。生徒の解答の解説の中で，グラフの変化が教師から示された。その後，式を求めるに当たってどの点を使うかを問題にした。ここで，デジタル教材に注目させた。

まず，原点と（3, 2）が入力され，それらを通る直線を引いた。すると，もともと表示されているグラフとは違うところを点が動き，軌跡が示された。教師はこれを見ながら，次のように述べた。

教師：違うよね。全然違うところ行ってるでしょ。残念だよね，残念。比例君走って来たけど，これです（グラフを指して)。ということは，このグラフを通る直線ではないってことだね，(3, 2）はね。

続いて，生徒から（1, 2）という意見が出たため，原点と（1, 2）を通る直線についても試したが，やはり通らない。ここでは，教師は「y=2x って赤い直線ですね，あ，違うね。違うね。1の時に2って，あってそうなんだけど，実は違ったのね。通りません」と述べた。

その後，教師が，x=1のときのyの値がはっきりしないことを指摘し，x=2のとき，(2, 1）という点でやってみることを提案した。T2が赤い直線を走らせると，今度はもともとのグラフ上を通っていった。それを見て，教師は，次のように述べている。

教師：行ったよね。ぴぃったりね。ぴったり。黒い線が赤く変わったでしょ。黒い直線だったのが，赤く変わった。比例君が走ったら，ぴったり，同じ直線だった。ということは，(2, 1）を通る直線って思えばいいね。

その後，(2, 1）を通る直線の式をどう求めるかを問いかけ，代入による求め方の話が続いていった。

5． まとめと今後の課題

本稿の問いは，「GeoGebraによる視覚的媒介の道具は，授業においてどのような談話を形作っていたか」であった。第4節では，GeoGebraが使われた幾つかの場面を取り上げ，教師の語りを中心に述べてきた。第2時には関数，第3時以降は比例が，授業で扱われていたが，どちらにおいても「動き」についての語りが顕著に見られた。関数では，「スピード」という発話が，早々と生徒から出てきた（第2時）。教師は「スピード」を，表の値（特に変数y）の変化と結びつけていった。また，関数の定義においても，「ある場所に点が止まる」のように，動きとの関わりで対応を表現していた。比例においても，「来た，来た，来た」「ずっと来て，端まで行く」「比例君が走ってきた」のように，動きについての語りが見られ，徐々に当たり前に語られるようになっていった（第6，7，8時）。Sfardの数学的談話で言うならば，動きに注目することが「ルーチン」になっていった。

動きについての語りは，グラフと密接に結びついていた。これは，グラフが動点の軌跡として表示されたためであり，GeoGebraによる視覚的媒介の道具によって形作られていたといえる。グラフが，動点の軌跡としてスクリーン上に示される際には，スライダーと座標平面という2つの表示の間でのずれから，画面に表示されない部分でもグラフが存在していることが実感されることとなった（第6，7時）。このことによって，「ずうっと続く」「永遠に続く」といった語りが生まれ，繰り返されていった。こうしたずれが，語りに大きな影響を及ぼすことは，あまり予想していなかった。更に，ずっと続いているという語りは，一定の枠の中の座標平面に表示されているグラフが，一連の動きの一部分に過ぎないという語りも生み出していた。

第4時において，離散的な数値で，表，式に共応するかたちで，点が次々に打たれていくデジタル教材では，単純に点同士を直線で結んでいる生徒との間でのずれが顕在化した。その際，教師は，点と点の間を繋いで良いかを問い，エレベータの動きから，グラフの連続性について述べた。また，離散的な数値を示している表について言及があった。表という表現が，一部の数値を切り取って示したものに過ぎないという語りが生み出されていた。ここでは，表が，量の関係を表す1つの手段であることが，デジタル教材を媒介として語られたと考える。

教科書では，表，式，グラフのすべてが，動かない静的な表現として示されている。静的に構造を捉えることの難しさは，Sfardのコンセプション研究においても指摘されてきている。それに対して，GeoGebraによる視覚的媒介の道具では，動きを見せていった。動きが前面に出たことで，上で述べたように，動いている対象と，その動きの表，あるいは，枠の中の座標平面での見え方との区別が促される結果となった。これは，生徒のそれまでの比例の談話に対して，局所的ではあるが，1つの振り返りの機会を与えていたと考える。生徒が慣れ親しんでいる比例の談話では，量の関係とその表現とは，生徒においてはあまり分離されていないと考えられるためである。

その一方で，グラフについては，そのような区別はなされなかった。むしろ，教師や生徒のグラフについての語りの様子から，「量＝グラフ」という認識が強まったと考える。ここでの量は，動いている点のことであり，時間（変数x）と「深さ」（変数y），あるいは，時間（変数x）と「高さ」（変数y）とが一体化したものでもある。グラフは，2つの変数が伴って変わる様子を表している１つの表現である。しかし，点が動くことは，これらの異なる変数を，「1つ」に一体化して見ることを促していたと考える。

動点の軌跡としてグラフを見せると，こうした傾向が促されることには注意が必要であろう。従って，グラフにおいて，xの変化とyの変化の関係が見えるように，工夫を施すことは大切かもしれない。また，グラフでは，「点」としてxとyの一体化が促されてしまうため，グラフ以外の図的な表現も使いながら，xが変化することに伴うyの変化が見えるようなデジタル教材，また，学習課題を工夫することも大切である。第2時の授業の中で予定外に生徒の注目を集めることになったスライダーを，変数xを表す表現として，変数yとは別に使う可能性もあるだろう。また，授業の中で，グラフが無限個の点の集合から構成されていることは，説明の形では，あまりはっきりとは扱われなかった。第9時，第10時での式を求める活動では，グラフ上の点だと思った (1, 2) が，実は違っていること等を，グラフの上に乗るか乗らないかで視覚化した。これに関連して，グラフが，ある条件を満たす無限個の点から構成されていることに注意を向けるような学習活動を検討したい。

GeoGebraによる視覚的媒介の道具では，動きが視覚的に示された一方で，動かない部分については，表現によって見えやすさが異なった。動かない（不変な）部分が見えやすかったのは式である。実際，第4時において，数字式でxとyはどんどん変わっていくが，比例定数である「a」は変わらずに一定であることが，生徒に可視化された場面があった。このとき，教師は，そのことが表の中でどのような意味を持つかを話していた。式という表現から表という表現への，数学的事実の翻訳が行われていたといえよう。ここでは，式と表の間での関連は図られたが，この数学的事実は，グラフには翻訳されなかった。全体的に，ある数学的事実が，ある表現において確認されたときに，それが別の2つの表現に翻訳される場面は，あまり観察されなかった。同じ数学的事実の表現間での翻訳は，その事実の振り返りを促進するため，より積極的に行っていくことを考えたい。特に，比例定数は，振り返りの鍵となるため，視覚的媒介を使った学習活動の工夫が必要である。

このように，GeoGebraによる特徴的な視覚的媒介の道具は，教科書とは違った特徴を持つ談話を形作ることに貢献していた。生徒がそれまで学んできている比例の談話を振り返ることがいかに行われていたかを考えると，動きという側面が加わったり，局所的にではあるが，動いている対象とその表現との区別が付けられたりしている点が認められた。一方，表現間での同じ対象の見え方の違いから，変数と定数の振り返りをいかに促進できるかについて，課題が見えた。更に，関数的な見方として，2変数間での変化と対応は欠くことができないが，この点での課題も残された。

本稿では，一連の授業の前半部分の考察に留まっているため，反比例や応用が扱われた後半部分を含めて，引き続き考察を進めていきたい。また，挙げられた成果や課題に基づいて，生徒の比例・反比例の談話の振り返りを促進するという観点から，学習活動の改善を図っていく必要がある。

引用・参考文献

日野圭子. (2010).「中学校比例の授業での生徒の表・式・グラフの内化の様相：グラフに焦点をあてて」『第43回数学教育論文発表会論文集』第1巻, 211－216.

日野圭子. (2015).「小中移行期の生徒の比例の概念発達を促す授業のデザインに向けて」『宇都宮大学教育学部紀要』65号, 第1部, 81－96.

大谷実・布川和彦・日野圭子・漢野有美子. (2014).「ディスコースを視点とした数学的対象の構成：一次関数のデザイン実験とその分析」『第47回秋期研究大会発表集録』347－350.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses and mathematizing*. New York: Cambridge University Press.

Sfard, A. (2012). Introduction: Developing mathematical discourse-Some insights from communicational research. *International Journal of Educational Research 51-52,* 1-9.

Tabach, M., & Nachlieli, T. (2015). Classroom engagement towards using definitions for developing mathematical object: The case of function. *Educational Studies in Mathematics, 90,* 163-187.

Walshaw, M., & Anthony, G. (2008). The teacher’s role in classroom discourse: A review of recent research into mathematics classrooms. *Review of Educational Research, 78*(3), 516–551.

本研究は，平成27年度科学研究費補助金基盤研究(C)「小学校から中学校への移行期の生徒の関数的思考の進展を促す継続的な授業のデザイン」の助成を受けて行われた。

平成28年 3月31日 受理